

Θεωρία Αποφάσεων BayesΠέμπτη
16/1/2019Πρώτος Bayes 6-9.
Υλη μέχρι και σήμερα
~~πριν~~ όχι υποχρεωτική.Έλεγχος Στατιστικών Υποθέσεων1^ο Βήμα Διατύπωση της στατιστικής υπόθεσης2^ο Βήμα Ανοίγουμε μεθόδολογιών που στηρίζονται στο $\tau\delta$ για τον έλεγχο της υπόθεσης3^ο Βήμα Εφαρμογή Συμπερασμάτων

Χρησιμοποιούμενη ορολογία:

- Μηδενική υπόθεση (H_0) η υπόθεση, η οποία ορίζεται με την ελπίδα να απορριφθεί.
- Εναλλακτική $-//-$ (H_1 ή H_2) η "αντίθετη" της H_0 .
- Σκοπός να εντοπισθεί ένας κανόνας απόφασης για την ορθότητα ή μη της μηδενικής υπόθεσης.

Πιθανά σφάλματα:

- Σφάλμα τύπου I $\equiv \alpha = P(\text{απορρ } H_0 / H_0 = \text{αληθής})$
- Σφάλμα τύπου II $\equiv \beta = P(\text{αποδ } H_0 / H_1 = \text{αληθής})$

Το α ονομάζεται και επίπεδο σημαντικότητας.
Ενώ η ισχύς του στατιστικού τεστ συμβολίζεται με γ και είναι $\gamma = 1 - \beta$
 $= P(\text{απορρ } H_0 / H_1 \text{ αληθ.})$

Παρατήρηση: Στην κλασική στατιστική συμπερασματολογία, σταθεροποιούμε το α και προσπαθούμε να βρούμε ένα κανόνα απόφασης που ελαχιστοποιεί το β ή μεγιστοποιεί αντίστωχα το γ . Αφού σταθεροποιήσουμε το α , αυτό σημαίνει ότι είναι γνωστή η πιθανότητα σφάλματος τύπου I, άρα γνωρίζουμε εκ των προτέρων την $P(\text{σφάλμα τύπου I})$. Επομένως ελπίζουμε να απορρ. την H_0 , γιατί τότε ξέρουμε ότι το σφάλμα θα είναι α .

Σημείωση: Μια υπόθεση λέγεται αληή, όταν καθορίζει πλήρως την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής, ενώ λέγεται σύνθετη, όταν καθορίζει μερικώς

π.χ. Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ τ.δ. από την $f(x|\theta)$ τότε $H_0: \theta = \theta_0$ αληή // $H_0: \theta = \theta_0$ αληή
 $H_1: \theta = \theta_1$ $-//-$ $H_1: \theta \neq \theta_0$ σύνθετη
 (αληή προς αληή) (αληή προς σύνθετη). (1)

Κατασκευή στατιστικών τεστ (για τον έλεγχο αληθούς προς αληθούς)

$$H_0: \theta = \theta_0$$

έναντι

$$H_1: \theta = \theta_1$$

1^η Μέθοδος Κλασική Στατιστική Συμπερασματολογία (Λήμμα Neymann - Pearson)

Το πλέον ισχυρό στατιστικό τεστ προσδιορίζεται ως εξής:

$$\frac{L_0}{L_1} = \frac{\prod_{i=1}^n f(x_i | \theta_0)}{\prod_{i=1}^n f(x_i | \theta_1)} \leq K \quad (\text{περιοχή απορρίψης ή κρίσιμη περιοχή})$$

όπου το K προσδιορίζεται έτσι ώστε
 $\alpha = P(\text{απορρ } H_0 / H_0 = \text{αληθής})$

2^η Μέθοδος (MINIMAX TEST)

Οι έλεγχοι υποθέσεων είναι αποφάσεις με τη μορφή επιλογής μεταξύ 2 διαφορετικών υποθέσεων.

$$\begin{cases} H_0: \theta \in \Omega_0 \\ H_1: \theta \in \Omega_1 \end{cases}, \text{ όπου } \Omega_i \ i=0,1 \text{ υποδύνάμια (συνηθώς συμπληρωματικές)} \\ \text{του παραμετρικού χώρου } \Theta.$$

Αν το δούμε ως πρόβλημα θεωρίας αποφάσεων μπορούμε να προβούμε σε 2 αποφάσεις $\rightarrow$ αποδοχή H_0
 $\searrow$ αποδοχή H_1 ή H_0

Έστω λοιπόν τ.δ. $x_1, x_2, \dots, x_n$ από ένα πληθυσμό με κατανομή $f(x|\theta)$ και θέλουμε να ελέγξουμε την υπόθεση: $H_0: \theta = \theta_0$ έναντι $H_1: \theta = \theta_1$ ($\theta_1 \neq \theta_0$)

Έστω η απόφαση d_0 αντιστοιχεί στην αποδοχή της H_0 και η d_1 στην απορρίψη της H_0 .

Επιπλέον η συνολική απώλεια θα είναι $L(\theta_j, d_i) = \begin{cases} 0 & i=j \\ k_i, k_i > 0, & i \neq j \end{cases}$

$$L(\theta_0, d_0) = 0 = L(\theta_1, d_1) \text{ και } L(\theta_0, d_1) = k_1 \text{ και } L(\theta_1, d_0) = k_0$$

Τότε η συνολική διακινδυνεύσεως θα είναι $R(\theta, d_0) = E_\theta(L(\theta, d_1)) =$

$$= L(\theta_1, d_0) P_{\theta_1}(d=d_0) + L(\theta_0, d_1) P_{\theta_0}(d=d_1) = k_0 \cdot P(\text{αποδ } H_0 / \theta = \theta_1) + k_1 \cdot P(\text{απορ } H_0 / \theta = \theta_0)$$

Παράλληλα από την κλασική θεωρία γνωρίζουμε ότι

$$\gamma(\theta) \equiv \text{ισχύς} = P(\text{απορ } H_0 / \theta = \theta) \rightarrow \theta_1$$

Επομένως θα είναι $R(\theta, d) = K_0(1 - \gamma(\theta)) + K_1\gamma(\theta)$

Παρατηρούμε ότι η συνλ. Διακινδυνεύσεως είναι γραμμική συνλ. της συνλ. ισχύος. Είναι επιθυμητό να επιλεγεί εκείνη η απόφαση που ελαχιστοποιεί τη συνλ. διακινδ.

Όμως αφού το θ θα πάρει 2 τιμές και η συνλ. διακινδ. παίρνει 2 τιμές.

$$R(\theta_0, d_1) = K_1 \gamma(\theta_0)$$

ή

$$R(\theta_1, d_0) = K_0(1 - \gamma(\theta_1))$$

Είναι "δύσκολο" να εντοπισθεί στατιστικό τεστ που ελαχιστοποιεί ταυτόχρονα τις 2 αυτές τιμές για το λόγο αυτό ορίζεται το Minimax test ως εξής:

Ορισμός: Για τον έλεγχο της $H_0: \theta = \theta_0$ έναντι της $H_1: \theta = \theta_1$, ένα τεστ d^* ορίζεται να είναι: ελαχιστομέγιστο (minimax) εάν και μόνο αν

$$\max_d [R(\theta_0, d^*), R(\theta_1, d^*)] \leq \max_d [R(\theta_0, d), R(\theta_1, d)] \quad \forall d \in \mathcal{D}$$

Δηλαδή αρχικά εντονίζουμε το $\max_{\theta} R(d, \theta)$ και μετά ελαχιστοποιούμε ως προς d , δηλ. $\min_d \max_{\theta} R(d, \theta)$

ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ τ.δ από ένα πληθυσμό με $f(x|\theta)$. Για τον έλεγχο της $H_0: \theta = \theta_0$ Έστω ένα τεστ d με κ.η $C_d = \{ \lambda \leq K_d \}$
 $H_1: \theta = \theta_1$

όπου K_d μια θετική σταθερά τω $R(\theta_0, d) = R(\theta_1, d)$

τότε το τεστ d θα είναι ελαχιστομέγιστο

Το λ ορίζεται κατά τα γινωστά ως $\lambda = \frac{L_0}{L_1} = \frac{\prod_{i=1}^n f(x_i|\theta_0)}{\prod_{i=1}^n f(x_i|\theta_1)} \leq K$

Επομένως βάση του παραπάνω θεωρήματος το minimax test θα είναι εκείνο για το οποίο ισχύει ότι $R(\theta_0, d_1) = R(\theta_1, d_0) \Rightarrow K_1 P(\text{απόφαση } d_1 | \theta = \theta_0) = K_0 P(\text{απόφαση } d_0 | \theta = \theta_1)$

$$\Rightarrow K_1 P(\text{απορρ } H_0 / H_0 = \text{αληθής}) = K_0 P(\text{απορρ } H_0 / H_1 = \text{αληθής})$$

3ος Μέθοδος (Bayes test)

Βάση της προσέγγισης που έχουμε ακολουθήσει στη θεωρία Bayes μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εκ των προτέρων πληροφορία που έχουμε για τις H_0 και H_1

Συγκεκριμένα αν $f(\theta_0)$ και $f(\theta_1)$ είναι οι εκ των προτέρων κατανομές για τις H_0 και H_1 αντίστοιχα, μπορούμε να υπολογίσουμε τις εκ των υστέρων πιθανότητες $f(\theta_0|x)$ και $f(\theta_1|x)$ και θα αποφασίσουμε συγκρίνοντας τις.

Η περιοχή απόρριψης της H_0 θα προκύπτει από την ελαχιστοποίηση της $E_{0|x}(L(\theta, d_1))$, δηλ. $f(\theta_0|x) L(\theta_0, d_1) < f(\theta_1|x) L(\theta_1, d_0) \Rightarrow$

$$\frac{f(\theta_0) \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta_0) f(\theta_0|x)}{f(\theta_1) \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta_1) f(\theta_1|x)} < \frac{L(\theta_1, d_0)}{L(\theta_0, d_1)} \Rightarrow \frac{\prod_{i=1}^n f(x_i|\theta_0)}{\prod_{i=1}^n f(x_i|\theta_1)} < \frac{L(\theta_1, d_0) f(\theta_1)}{L(\theta_0, d_1) f(\theta_0)}$$

δηλαδή $K = \frac{L(\theta_1, d_0) f(\theta_1)}{L(\theta_0, d_1) f(\theta_0)}$

Συνοψίζοντας Για τον έλεγχο της αληθούς προς αληθούς στατιστικής υποθέσεως $H_0: \theta = \theta_0$ έναντι $H_1: \theta = \theta_1 \neq \theta_0$.

Χρησιμοποιούμε ως περιοχή απόρριψης την $\frac{L_0}{L_1} = \frac{\prod_{i=1}^n f(x_i|\theta_0)}{\prod_{i=1}^n f(x_i|\theta_1)} \leq K$ όπου

1η μέθοδος K τ.ω $P(\text{απόρρ } H_0 / \theta = \theta_0) = \alpha$

2η μέθοδος K τ.ω $K_1 \cdot P(\text{απόρρ } H_0 / \theta = \theta_0) = K_0 \cdot P(\text{απόρρ } H_0 / \theta = \theta_1)$

3η μέθοδος $K = \frac{L(\theta_1, d_0) f(\theta_1)}{L(\theta_0, d_1) f(\theta_0)}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1^ο Έστω $T \sim \sum_{i=1}^n X_i$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ από την κανονική $N(\theta, \sigma^2=100)$, $n=100$.
Νοί ελεγχθεί η $H_0: \theta=75 (= \theta_0)$ έναντι $H_1: \theta=78 (= \theta_1)$ κάνοντας χρήση:

i) ισχυρότερο τεστ με $\alpha=5\%$

ii) τεστ minimax με $L(\theta_0, d_1) = 3 (= k_0)$
 $L(\theta_1, d_0) = 1 (= k_1)$

iii) Bayes τεστ με $L(\theta_0, d_1) = L(\theta_1, d_0)$
και $f(\theta_0) = f(\theta_1)$.

Λύση

Θα έχουμε ότι η κρίσιμη περιοχή είναι $\frac{L_0}{L_1} \leq k \Rightarrow \frac{\prod_{i=1}^n f(x_i/\theta_0)}{\prod_{i=1}^n f(x_i/\theta_1)} \leq k \Rightarrow$

$$\frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum (x_i - \theta_0)^2}}{e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum (x_i - \theta_1)^2}} \leq k \Rightarrow e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \{ \sum (x_i - \theta_0)^2 - \sum (x_i - \theta_1)^2 \}} \leq k \Rightarrow$$

$$e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \{ -2\theta_0 \sum x_i + n\theta_0^2 + 2\theta_1 \sum x_i - n\theta_1^2 \}} \leq k \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2\sigma^2} \{ 2 \sum x_i (\theta_1 - \theta_0) + n(\theta_0^2 - \theta_1^2) \} \leq \ln k \Rightarrow$$

$$2 \sum x_i (\theta_1 - \theta_0) + n(\theta_0^2 - \theta_1^2) \geq -2\sigma^2 \ln k \Rightarrow$$

$$\sum x_i (\theta_1 - \theta_0) \geq -\sigma^2 \ln k - \frac{n}{2} (\theta_0^2 - \theta_1^2) \Rightarrow \underline{\theta_1 > \theta_0} \Rightarrow$$

$$\sum x_i \geq \frac{-\sigma^2 \ln k - \frac{n}{2} (\theta_0^2 - \theta_1^2)}{\theta_1 - \theta_0} = k^* \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{περιοχή απορρίψης} \end{array} \right.$$

i) 1^η μέθοδος Για το k^* θα έχουμε ότι είναι τ.ω:

$$\alpha = P(\text{απορ } H_0 / H_0 = \text{αληθής}) \Rightarrow$$

$$P(\sum x_i \geq k^* / X_i \sim N(\theta_0, \sigma^2)) = \alpha \Rightarrow P(\sum x_i \geq k^* / \sum x_i \sim N(n\theta_0, n\sigma^2)) = \alpha \Rightarrow$$

$$P\left(\frac{\sum x_i - n\theta_0}{\sqrt{n\sigma^2}} \geq \frac{k^* - n\theta_0}{\sqrt{n\sigma^2}} / H_0 = \text{αληθής}\right) = \alpha \Rightarrow$$

Επομένως $\frac{k^* - n\theta_0}{\sqrt{n\sigma^2}} = Z_\alpha \Rightarrow \boxed{k^* = n\theta_0 + Z_\alpha \sqrt{n\sigma^2}}$

✓ αντικαθιστούμε για να βρούμε την τιμή.

Όσον αφορά το επίπεδο σημαντικότητας αυτό θα είναι $\alpha = 5\% = 0,05$ (παραδοσιακό).

Ενν η ισχύς του τεστ θα είναι: $\gamma = P(\text{απορρ } H_0 / H_1 = \text{αληθής}) = P(\sum X_i \geq k^* / \theta = \theta_1) =$

$$= P\left(\underbrace{\sum_{i=1}^n X_i \geq k^*}_{Z \sim N(0,1)} / \sum_{i=1}^n X_i \sim N(n\theta_1, n\sigma^2)\right) = P\left(\frac{\sum X_i - n\theta_1}{\sqrt{n\sigma^2}} \geq \frac{k^* - n\theta_1}{\sqrt{n\sigma^2}} / H_1 = \text{αληθής}\right) \Rightarrow$$

$$\gamma = 1 - \Phi\left(\frac{k^* - n\theta_1}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) \text{ όπου } \Phi \text{ η α.σ.κ της } N(0,1).$$

ii) 2^η μέθοδος το k^* θα πρέπει να καθοριστεί έτσι ώστε να ισχύει

$$K_1 \cdot P(\sum X_i \geq k^* / X_i \sim N(\theta_0, \sigma^2)) = K_0 \cdot P(\sum X_i < k^* / X_i \sim N(\theta_1, \sigma^2)) \Rightarrow$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{απορρ } H_0} \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{H_1 \text{ αληθής}}$

$K_1 = 1$
 $K_0 = 3$

$$3 \cdot P(\sum X_i \geq k^* / X_i \sim N(\theta_0, \sigma^2)) = 1 \cdot P(\sum X_i < k^* / X_i \sim N(\theta_1, \sigma^2))$$

$$3 \cdot P\left(\frac{\sum X_i - n\theta_0}{\sqrt{n\sigma^2}} \geq \frac{k^* - n\theta_0}{\sqrt{n\sigma^2}} / H_0: \text{αληθής}\right) = 1 \cdot P\left(\frac{\sum X_i - n\theta_1}{\sqrt{n\sigma^2}} < \frac{k^* - n\theta_1}{\sqrt{n\sigma^2}} / H_1 \text{ αληθής}\right)$$

$$\Rightarrow 3 \left(1 - \Phi\left(\frac{k^* - n\theta_0}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)\right) = \Phi\left(\frac{k^* - n\theta_1}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) \Rightarrow k^* = 7680.$$

Όσον αφορά το επίπεδο σημαντικότητας αυτό θα είναι

$$\alpha = \beta$$

$$\alpha = P(\text{απορρ } H_0 / H_0 = \text{αληθής}) = P(\sum X_i \geq k^* / \theta = \theta_0) \Rightarrow$$

$$\alpha = P(\sum X_i \geq k^* / \sum X_i \sim N(n\theta_0, n\sigma^2)) = P\left(\frac{\sum X_i - n\theta_0}{\sqrt{n\sigma^2}} \geq \frac{k^* - n\theta_0}{\sqrt{n\sigma^2}} / H_0 = \text{αληθής}\right)$$

$$\text{οπότε } \alpha = 1 - \Phi\left(\frac{k^* - n\theta_0}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)$$

$$\text{Ενν η ισχύς θα είναι } \gamma = 1 - \beta = 1 - P(\text{απορρ } H_0 / H_1 = \text{αληθής}) \overset{\text{παραδοσιακό}}{=} 1 - \Phi\left(\frac{k^* - n\theta_1}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)$$

iii) 3^η μέθοδος Θα έχουμε ότι

$$\text{To } K = \frac{k_0 f(\theta_1)}{k_1 f(\theta_0)} \Rightarrow K^* = 1 \Rightarrow$$

Επομένως θα είναι:

$$-\frac{1}{2\sigma^2} \left\{ \sum (x_i - \theta_1)^2 - \sum (x_i - \theta_0)^2 \right\} \leq K = 1 \Rightarrow$$

$\frac{0}{-1} = e$

$$\text{πραγμ.} \Rightarrow K \cdot n \sum x_i \geq \frac{n(\theta_1^2 - \theta_0^2)}{2(\theta_1 - \theta_0)} = \frac{n(\theta_0 + \theta_1)}{2} \quad n=100$$

$\theta_1 = 78, \theta_0 = 75$

όπου αφορά το επίπεδο σημαντικότητας θα είναι:

$$\alpha = P(\text{απορ } H_0 / H_0 = \text{αληθής}) = P\left(\sum x_i \geq n \frac{(\theta_0 + \theta_1)}{2} / H_0 = \text{αληθής}\right)$$

$$= P\left(\frac{\sum x_i - n\theta_0}{\sqrt{n\sigma^2}} \geq \frac{\frac{n(\theta_0 + \theta_1)}{2} - n\theta_0}{\sqrt{n\sigma^2}} / H_0 = \text{αληθής}\right) \Rightarrow$$

$$\alpha = 1 - \Phi\left(\frac{n(\theta_1 - \theta_0)}{2\sqrt{n\sigma^2}}\right)$$

Ενν η ισχύς θα είναι:

$$\gamma = 1 - \beta = 1 - P(\text{απορ } H_0 / H_1 = \text{αληθής}) \stackrel{\text{παρμ.}}{=} 1 - \Phi\left(\frac{n(\theta_0 - \theta_1)}{2\sqrt{n\sigma^2}}\right)$$

Άσκηση Έστω τ.σ $x_1, x_2, \dots, x_n$ από εκθ(θ), δηλ $f(x|\theta) = \theta \cdot e^{-\theta x}, x > 0$

Για τον στατιστικό έλεγχο της αληθούς προς αληθής υπόθεσης $H_0: \theta = \theta_0$

$H_1: \theta = \theta_1 (\theta_0 < \theta_1)$

να κατασκευ. το minimax και στη συνέχεια να εξεταστεί η περίπτωση για $n=1$ με

$$d_0^* = L(\theta_1, d_0) = L(\theta_0, d_1) = d_1^*$$

και $\theta_0 = 1$ ή $\theta_1 = 2$ όπου $d_0 = \text{απορ } H_0$

$d_1 = \text{απορρ. } H_0$